УДК 51-7(519.21,519.216,519.217)

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Д.Н. Жабин, Е.С. Холопова

Томский политехнический университет
E-mail: Holopowa@yandex.ru, zhabin@mph.phtd.tpu.edu.ru

Рассмотрена произвольная линейная система, находящаяся под воздействием внешних хаотических импульсов. Предполагается, что передача внешнего импульса системе описывается некоторой квадратично-интегрируемой функцией. Показано, что при сделанных предположениях можно вполне корректно определить стохастический интеграл.

Будем считать некоторую физическую систему линейной, если под воздействием внешних возмущений $y(s)$, $0\le s\le t$, её фазовое состояние в момент времени t определяется как:

$$x(t)=\int_0^t \varpi(t,s)y(s)ds, \qquad (1)$$

где $\varpi(t,s)$, $0\le s\le t$ – некоторая кусочно-непрерывная функция, которую обычно называют *весовой функцией* системы. Она описывает поведение системы в момент времени s выведенной из состояния покоя случайным независимым импульсом. Далее примем $\varpi(t,s)=1$.

Рассмотрим линейную систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением вида

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...+a_nx(t)=y(t), \qquad (2)$$

где коэффициенты $a_k=a_k(t)$, $k=1,2,...,n$, могут меняться с течением времени.

Интеграл (1) есть решение дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее нулевым начальным условиям $x^{(k)}(0)=0$ при $k=0,1,...,n-2$ и $x^{(n-1)}(0)=1$.

Обычно предполагается [1], что возмущение усваивается мгновенно. Тогда в качестве внешнего воздействия выбирается «единичный импульс»:

$$y(t)=\Delta\eta(t_k)\delta(t-s), \qquad (3)$$

где под $\delta(t-s)$ понимается общеизвестная «дельта-функция».

В результате воздействия хаотических быстро меняющихся возмущений на «выходе системы» будем иметь случайный процесс $\xi=\xi(t)$ вида:

$$\xi(t)=\sum_{0\le t_k\le t}\Delta\eta(t_k),$$

где $\Delta\eta(t_k)$, $k=1,2,...,$ – независимые случайные величины, для которых математические ожидания и дисперсии $M\Delta\eta(t_k)=a_k\Delta t_k$, $D\Delta\eta(t_k)=b_k\Delta t_k$, а $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ – означают промежуток времени до появления очередного импульса.

При $\max \Delta t_k\to 0$ мы фактически будем иметь дело с непрерывным воздействием на систему бесконечно малых независимых возмущений. При этом функции a_k и b_k имеют предел $a_k=a(t_k)$ и $b_k=b(t_k)$ где $a(t)$ и $b(t)$ кусочно-непрерывные функции.

В этой ситуации естественно от «дискретного» вида модели можно перейти к соответствующей «непрерывной» модели. В качестве такой модели может служить стохастический интеграл вида:

$$\xi(t)=\int_0^t d\eta(s).$$

Такое представление воздействия на систему приемлемо для винеровских и диффузионных процессов. Как известно, см. [1, 2], диффузионные процессы являются частным случаем линейной системы, находящейся под непрерывным воздействием хаотических, быстро меняющихся возмущений. Винеровские процессы предполагают, что исследуемые величины подчинены нормальному закону распределения $\sim N(0, \Delta t)$ и обладают независимостью приращений.

Однако заметим, что выбор возмущения в виде (3) не всегда оправдан. Воздействие импульсов может и не быть непрерывным и быстро меняющимся. Скорость взаимодействия с внешней средой для процессов, описываемых уравнениями параболического типа (уравнения диффузии, теплопроводности и т.д.; см. [3]), может быть бесконечна. В

этом случае воздействие на систему можно рассматривать как воздействие случайных медленно меняющихся импульсов. В связи с этим построение моделей, представляющих математический аппарат изучения линейной системы под воздействием случайных медленно меняющихся импульсов, является вполне актуальной задачей.

Такие модели могут найти прикладное применение, например, в экономике. Рынок капитала (рынок ценных бумаг) можно рассматривать как систему, которая быстро реагирует на воздействие некоторых импульсов, например, поступлений новой информации. В современной финансовой математике широкое распространение получила точка зрения, что процессы рынка капитала адекватно могут быть представлены в виде диффузионного или винеровского процесса. Однако такое предположение оправдано в рамках гипотезы эффективного рынка [4], одним из положений которой является предположение о том, что все участники рынка имеют одинаковый доступ к информации и вся новая поступающая информация усваивается рынком и его участниками мгновенно. Данное положение, по вполне очевидным причинам, лишь ограниченно соответствует реальности [5, 6]. Действительно, новая информация на рынке никогда не поступает одновременно ко всем его участникам. Усвоение информации и дальнейшее её использование для принятия решения о покупке или продаже того или иного актива тоже не является мгновенным процессом. Инвесторы могут не реагировать на информацию сразу после её получения. Вместо этого они могут откликаться на неё некоторое время спустя, если она подтверждает изменение в недавнем тренде, принимая в расчет также всю до того накопившуюся информацию. Таким образом, рынок представится системой, которая быстро реагирует на медленно меняющиеся импульсы.

Для такого типа систем корректнее было бы использовать вместо единичного импульса (3) класс квадратично-интегрируемых функций, которые отражали бы тот факт, что информация усваивается рынком постепенно. Поэтому в качестве импульсов, которые будут воздействовать на поведение рынка как системы, примем импульсы вида:

$$y(s) = \sum_{t_k} \Delta\eta(t) f(\varepsilon, t - t_k), \qquad (4)$$

возникающего в момент времени t_k, где $f(\varepsilon, t-t_k)$ – некоторая гладкая квадратично-интегрируемая функция.

В результате воздействия «на выходе» системы случайный процесс $\xi=\xi(t)$ представится как:

$$\xi(t) = \int_0^t \sum_{0 \le t_k \le t} f(\varepsilon, t - t_k)\Delta\eta(t_k)ds. \qquad (5)$$

Для этого случайного процесса:

$$M\xi(t) = \int_0^t F(t,s)a(s)ds, \; D\xi(t) = \int_0^t F^2(t,s)a(s)ds,$$

где $F(t,s) = \lim_{t_k \to 0} M \sum_{0 \le t_k \le t} f(\varepsilon, t - t_k)dt_k = \int_0^t f(\varepsilon, t-s)ds.$

Если обратиться к процессу $\xi(t)$, то можно было бы представить величины $\Delta\eta(t_k)$ как

$$\Delta\eta(t_k) = \eta(t_k) - \eta(t_{k-1}), \quad k = 1, 2, ...$$

Взяв в качестве $\eta(t)$, $t \geq 0$ винеровский процесс [1, 7], для которого приращения $\Delta\eta(t_k)=\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})$ являются независимыми (некоррелированными) случайными величинами.

Тогда в условиях непрерывного воздействия на систему (2) бесконечно малых независимых возмущений (4) возможно представление системы (5) в виде стохастического интеграла:

$$\xi(t) = \int_0^t \int_0^t f(\varepsilon, t - s)dtd\eta(s).$$

Учитывая, что внешнее возмущение имеет вид

$$\int_0^t f(\varepsilon, t-s)ds = F(t,s), \qquad (6)$$

воздействие на систему представим в виде:

$$\xi(t) = \int_0^t F(t,s)d\eta(s). \qquad (7)$$

Покажем существование интеграла (7). Пусть для случайного процесса $\eta(t)$, $c_1 \leq t \leq c_2$, его математическое ожидание и дисперсия такие, что

$$M[\Delta\eta(t)] = \int_s^t a(u)du, \quad D[\Delta\eta(t)] = \int_s^t b(u)du.$$

Сначала будем рассматривать случай, когда $a(t)\equiv 0$.

Для любой кусочно-постоянной функции $\varphi(t)$, сохраняющей постоянные значения $y_к=\varphi(t)$ при $t_{k-1}<t \leq t_k$ на конечном отрезке $[c_1,c_2]$, стохастический интеграл определяется формулой:

$$\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta\eta(t_k).$$

Интеграл не зависит от выбора разбиения на интервалы постоянства (t_{k-1},t_k), $k=1,...n$ и для него

$$M\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t) = 0,$$

$$M\left[\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t)\overline{\int_{c_1}^{c_2} \psi(t)d\eta(t)}\right] = \int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)\overline{\psi(t)}b(t)dt,$$

$$M\left|\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t)\right|^2 = \left\|\int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t)\right\|^2 = \int_{c_1}^{c_2} |\varphi(t)|^2 b(t)dt.$$

Для среднеквадратичного расстояния между величинами

$$\xi = \int_{c_1}^{c_2} \varphi(t)d\eta(t) \quad \text{и} \quad \varsigma = \int_{c_1}^{c_2} \psi(t)d\eta(t)$$

получаем следующее выражение [8]:

$$\|\xi - \varsigma\|^2 = \int_{c_1}^{c_2} |\varphi(t) - \psi(t)|^2 b(t)dt.$$

Пусть $\varphi(t)$, $c_1 \le t \le c_2$ – функция, удовлетворяющая условию $\int_{c_1}^{c_2} |\varphi(t)|^2 b(t)dt < \infty$, такая, что можно найти последовательность кусочно-постоянных функций $\varphi_n(t)$, где n=1,2,..., сходящуюся к $\varphi(t)$ в среднеквадратичном:

$$\int_{c_1}^{c_2} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2 b(t)dt \to 0,$$

$$\int_{c_1}^{c_2} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 b(t)dt \to 0, \quad n,m \to 0.$$

Соответствующая последовательность стохастических интегралов $\xi_n = \int_{c_1}^{c_2} \varphi_n(t) d\eta(t)$, n=1,2,..., будет удовлетворять условию

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \lim_{n,m\to\infty} \int_{c_1}^{c_2} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 b(t)dt \to 0.$$

Следовательно, существует величина ξ, предельная этой последовательности [см. 1, глава 1], такая, что $\|\xi_n - \xi\| \to 0$ при $n\to\infty$.

Этот предел $\xi = \int_{c_1}^{c_2} \varphi(t) d\eta(t)$ и есть стохастический интеграл.

Отметим, что понятие стохастического интеграла можно распространить также на случай $a(t) \ne 0$ и для бесконечного отрезка.

Выберем в качестве $\varphi(t)$ функцию (6) и рассмотрим в качестве примера следующую квадратично-интегрируемую функцию:

$$f(\varepsilon, t - t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \exp\left\{ \frac{-(t - t_k)^2}{2\varepsilon^2} \right\}.$$

Далее предположим, что $a(z)=a$=const, $b(z)=b$==const. Тогда

$$F(t,z) = \int_0^t f(\varepsilon, s - z) ds = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \exp\left\{ \frac{-(s - z)^2}{2\varepsilon^2} \right\} ds.$$

Учитывая сделанные предположения, получаем для случайного процесса $\xi(t)$ его математическое ожидание и дисперсию:

$$M\xi(t) = a\left\{ \frac{\varepsilon(-1 + \exp[-t^2/\varepsilon^2])}{\sqrt{\pi}} + t \cdot \mathrm{Erf}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right\},$$

$$D\xi(t) = \frac{1}{4} b \int_0^t \left\{ \mathrm{Erf}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) + \mathrm{Erf}\left(\frac{-s + t}{\varepsilon}\right) \right\} ds.$$

Для предельных значений математического ожидания и дисперсии при $\varepsilon\to 0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M\xi(t) = at,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D\xi(t) = bt.$$

В этом случае процесс становится диффузионным ($D\xi(t) \sim t$, $M\xi(t) \sim t$).

Таким образом, воздействие случайных медленно меняющихся импульсов на некоторую линейную систему можно представить в виде стохастического процесса. Для внешнего воздействия в виде квадратично-интегрируемой функции показано существование стохастического интеграла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука, 1971. – 286 с.
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
3. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный Н.В., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. – Т. 2. – Томск: Изд-во «НТЛ», 2002. – 400 с.
4. Fama E.F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work // Journal of Finance. – 1970. – № 25. – С. 18–22.
5. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
6. Peters E.E. Fractal market analysis. – N.Y.: Wiley, 1994. – 321 p.
7. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2003. – 624 с.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.